Aufgabe 1 *(Umlaufzahl)* (4 Punkte)
Sei L_1 der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0)$, und L_2 der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Radius 2 und Mittelpunkt $(3,0)$. Sei $c : [0,a] \to L_1 \cup L_2 \subset \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^1-Kurve mit $c([0,2\pi]) = L_1$, $c([2\pi,a]) = L_2$, und $c(0) = c(2\pi) = c(a) = (1,0)$. Außerdem sei c nach der Bogenlänge parametrisiert.

(i) Geben Sie c explicit an (unter anderem müssen Sie a bestimmen).

(ii) Berechnen Sie $n(c,0)$, die Umlaufzahl von c um 0.

Aufgabe 2 *(Konvex)* (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: U ist konvex $\Leftrightarrow \overline{U}$ ist konvex.

Aufgabe 3 *(Fundamentalsatz der Algebra)* (4 Punkte)
Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $c \in C^2(I,\mathbb{R}^2)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Bezüglich der Einheitsnormalen ν sei die Krümmung κ strikt positiv, d.h. $\kappa(s) > 0$ für alle $s \in I$. Zeigen Sie: Es existiert eine Umparametrisierung $\phi \in C^1(\tilde{I}, I)$ mit $\phi' > 0$, so dass die Funktion $\tilde{\nu} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{\nu}(t) = (\cos t, \sin t)$, Einheitsnormale der Kurve $\tilde{c} = c \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^2$ ist.
(Hinweis: Hauptsatz für ebene Kurven + Beweis)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Mittwoch, den 25.05.11.